Le TAMBOUR et la ROUILLE

Journée
MATh.en.JEANS
Bourgogne Franche-Comté

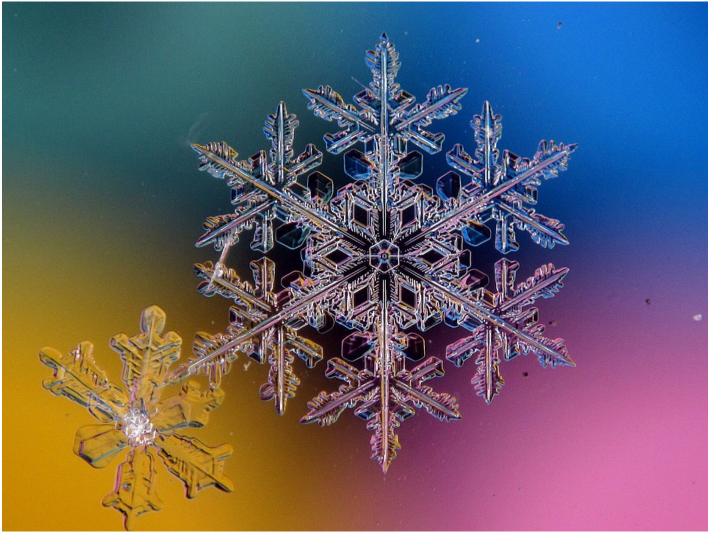
31 mai 2024

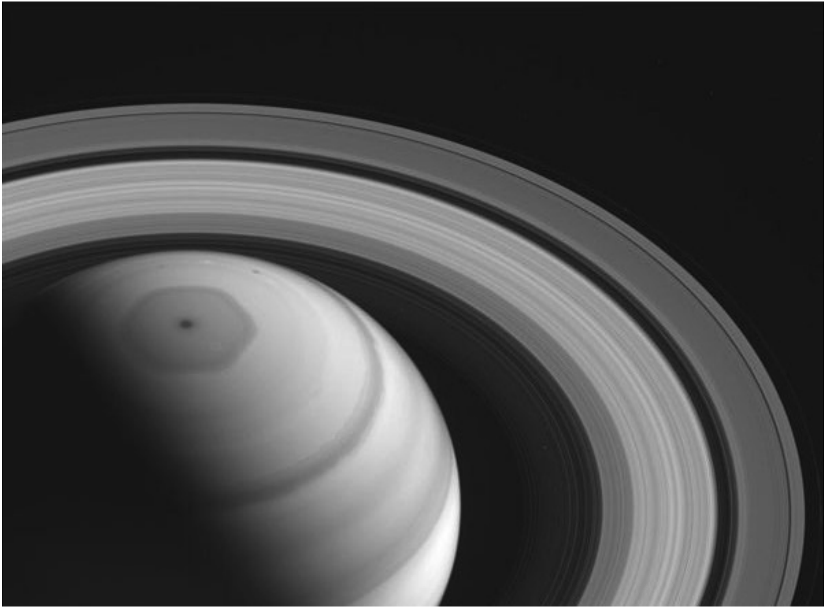
Damien Gayet
Institut Fourier
Université Grenoble Alpes

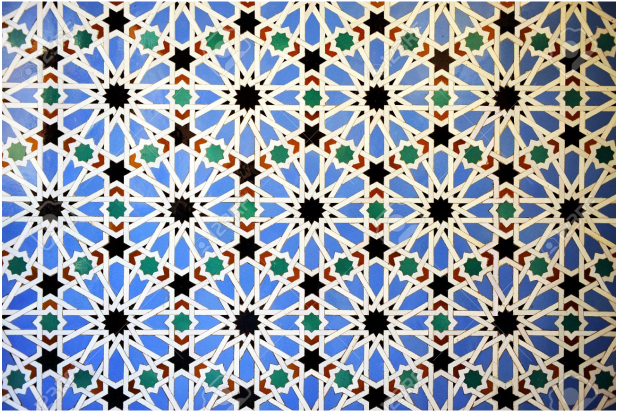
Introduction
Petits jeux

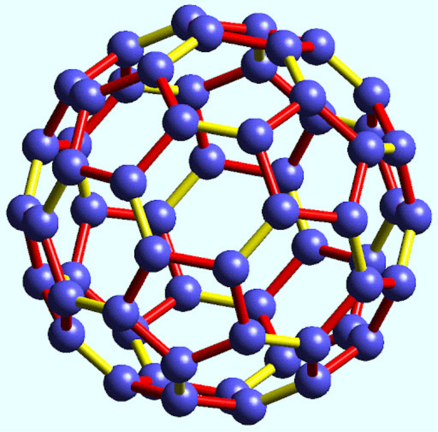
Jeu numéro 1

Quel est le point commun entre
les quatre images qui vont suivre ?









C_{60}: Buckminsterfullerene

H. W. Kroto*, J. R. Heath, S. C. O'Brien, R. F. Curl & R. E. Smalley

Rice Quantum Institute and Departments of Chemistry and Electrical Engineering, Rice University, Houston, Texas 77251, USA

During experiments aimed at understanding the mechanisms by which long-chain carbon molecules are formed in interstellar space and circumstellar shells[1], graphite has been vaporized by laser irradiation, producing a remarkably stable cluster consisting of 60 carbon atoms. Concerning the question of what kind of 60-carbon atom structure might give rise to a superstable species, we suggest a truncated icosahedron, a polygon with 60 vertices and 32 faces, 12 of which are pentagonal and 20 hexagonal. This object is commonly encountered as the football shown in Fig. 1. The C_{60} molecule which results when a carbon atom is placed at each vertex of this structure has all valences satisfied by two single bonds and one double bond, has many resonance structures, and appears to be aromatic.

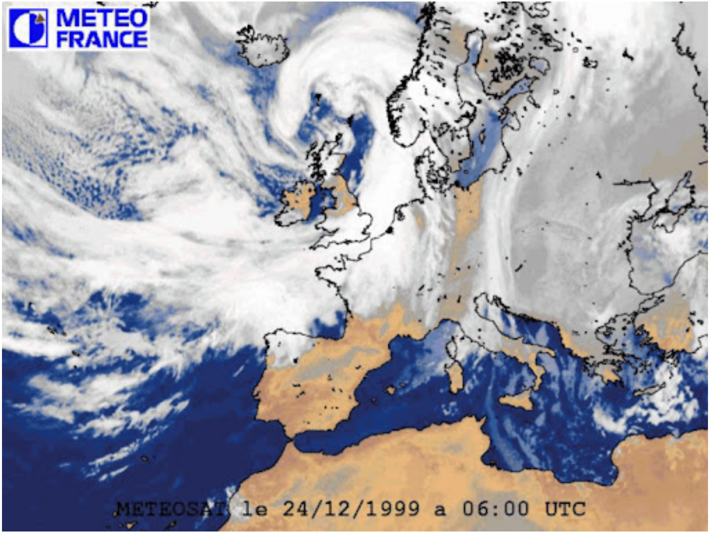
Fig. 1 A football (in the United States, a soccerball) on Texas grass. The C_{60} molecule featured in this letter is suggested to have the truncated icosahedral structure formed by replacing each vertex on the seams of such a ball by a carbon atom.

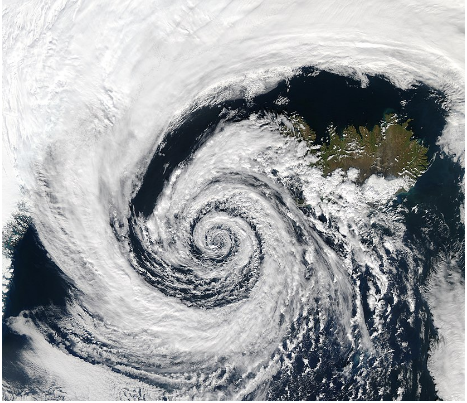
graphite fused six-membered ring structure. We believe that the distribution in Fig. 3c is fairly representative of the nascent distribution of larger ring fragments. When these hot ring clusters are left in contact with high-density helium, the clusters equilibrate by two- and three-body collisions towards the most stable species, which appears to be a unique cluster containing 60 atoms.

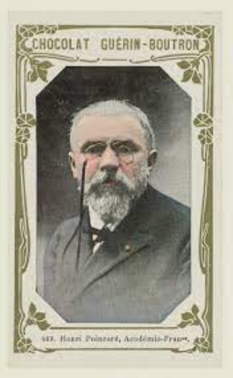
When one thinks in terms of the many fused-ring isomers with unsatisfied valences at the edges that would naturally arise

Jeu numéro 2

Quel est le point commun entre
les trois images qui vont suivre ?


METEO
FRANCE
METEOSAT le 24/12/1999 a 06:00 UTC

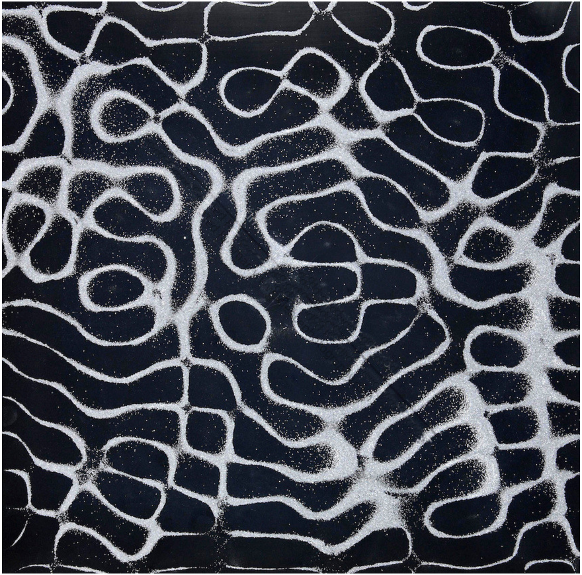





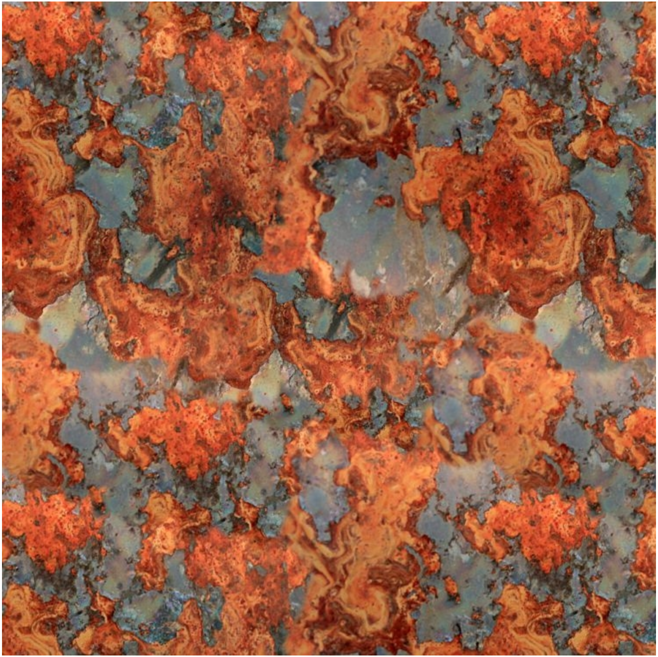
La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.
Henri Poincaré 1908.

Jeu numéro 3

Quel est le point commun entre
les quatre images qui vont suivre ?

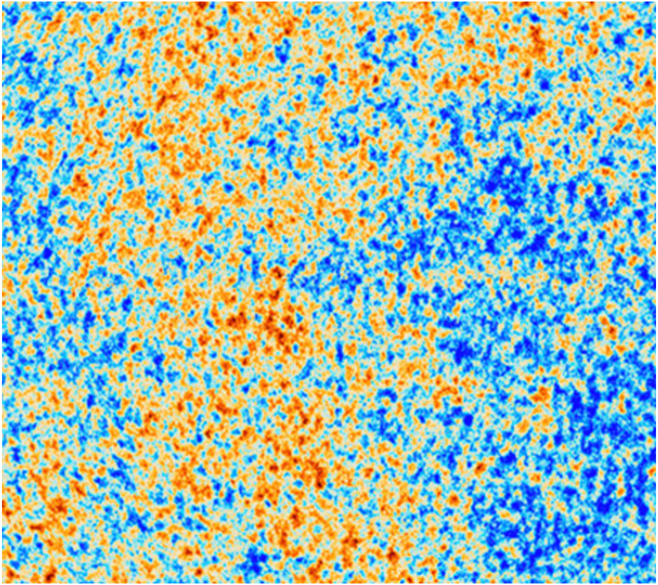


Sel sur une plaque vibrante



Rouille

Côte (australienne)

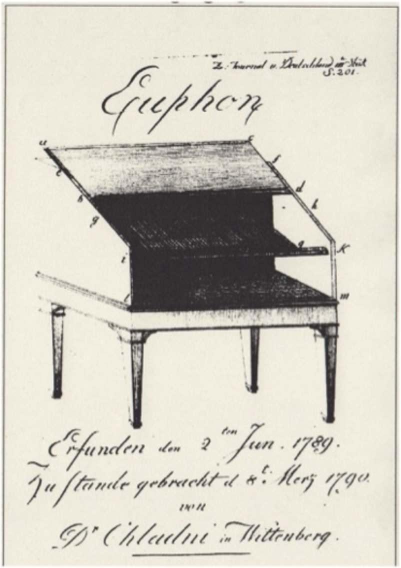


Fond cosmologique diffus

Maintenant, qu'est-ce que la science ? [...] c'est avant tout [...] une façon de rapprocher des faits que les apparences séparaient, bien qu'ils fussent liés par quelque parenté naturelle et cachée.
Henri Poincaré 1905

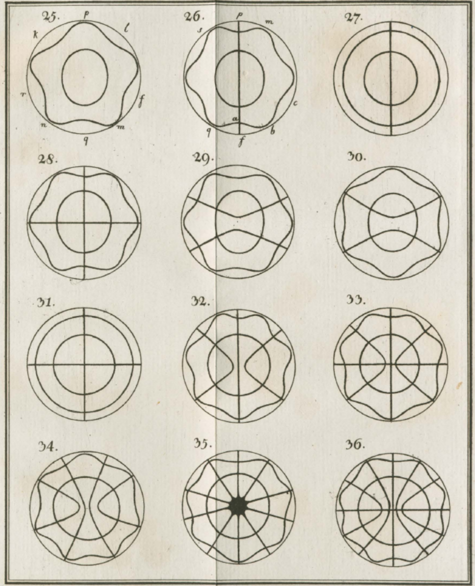
Partie 1
Les plaques vibrantes

Ernst Florens Friedrich Chladni (1757-1827)

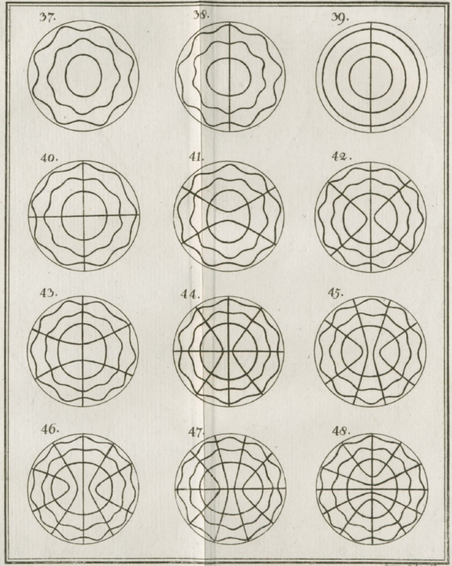

Euphon
Erfunden den 2ten Jun. 1789.
Zu stande gebracht d. 8t. Merz 1790.
von
Dr Chladni in Wittenberg.

Euphone

Tab. III.

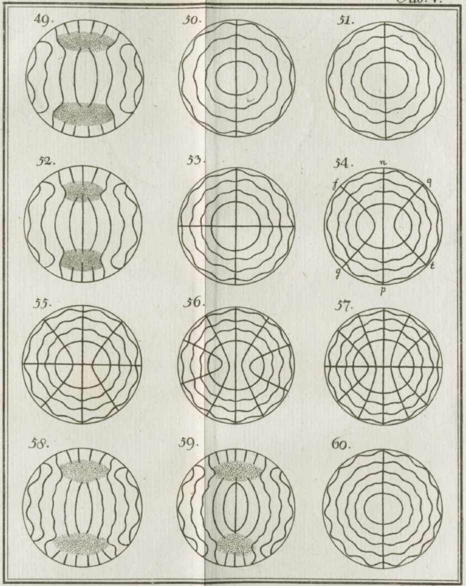


Capieux sculps. 1786.



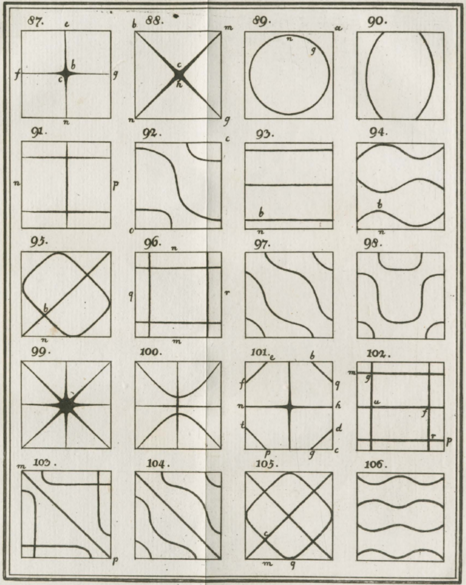
Capieux. sculps. 1786.

Tab. V.



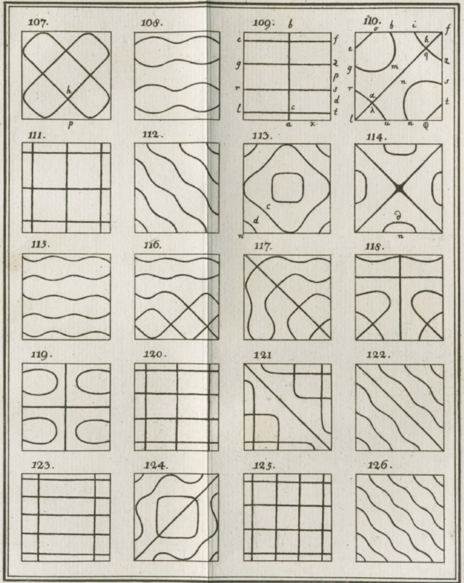
Capieux sculps. 1786.

Tab. VIII.



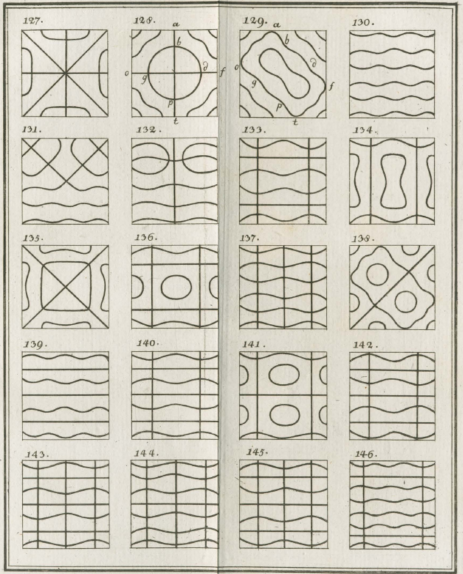
Capieux. sculps. 178[illegible].

Tab. IX.

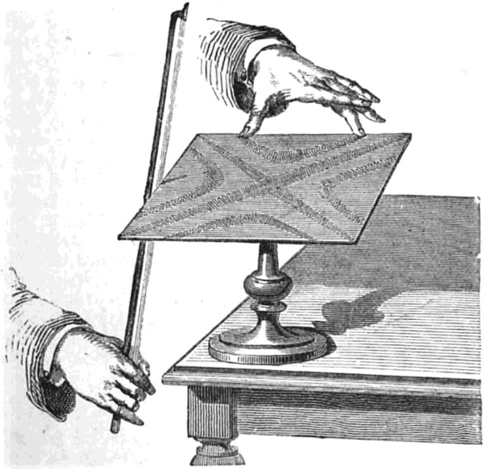


Capieux sculps. 1786.

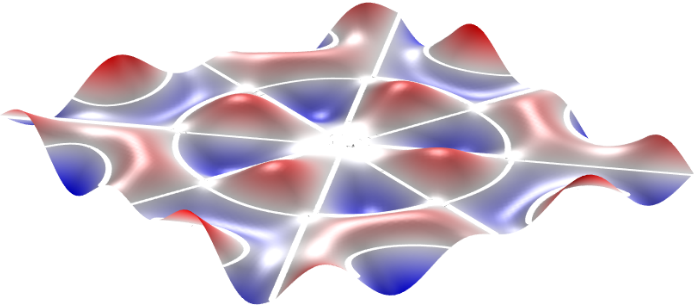
Tab X.

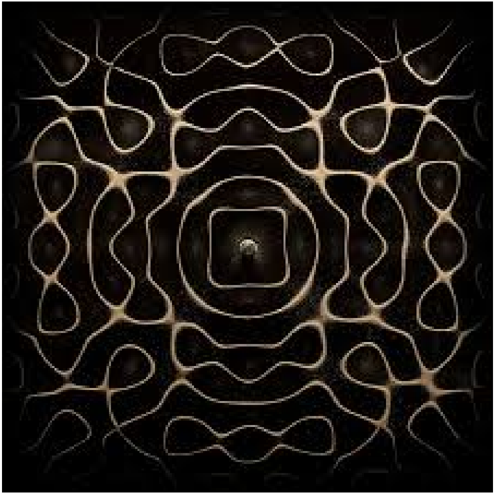


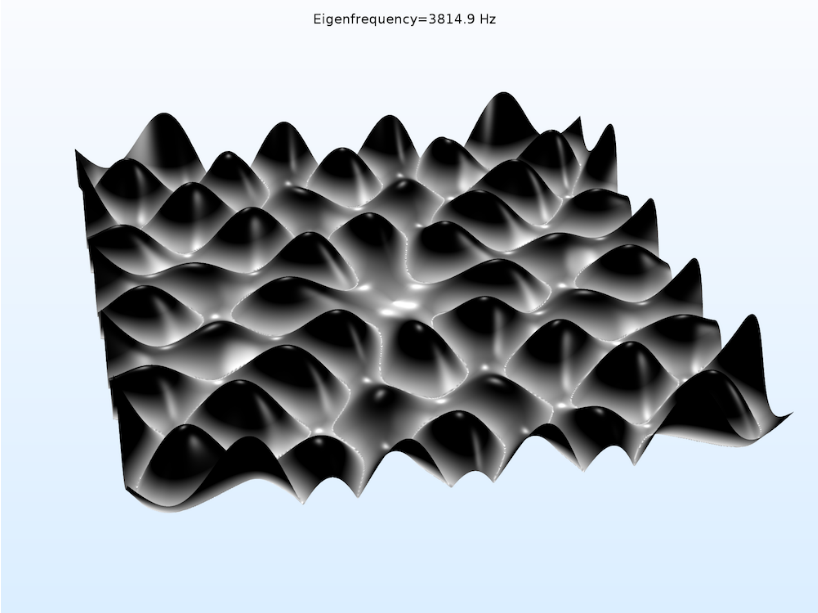
Capieux. sculps. 1787.



Vidéo






Eigenfrequency=3814.9 Hz

- 1806 : Prix de 3000 francs pour une théorie mathématique des figures de Chladni.
- 1816 : Prix gagné par...


FRANCE
Théorème
0,70 €
Soit p premier impair
Tel que 2p+1 ∈ P. Alors
x^p+y^p = z^p => p | xyz
SOPHIE
GERMAIN
1776-1831
La Poste 2016

Dans les cas de vibrations compris dans cette intégrale, les lignes d'extrémités courbes et les lignes d'extrémités droites sont les unes et les autres physiquement libres, cependant elles sont dans un état analytiquement différent.

En effet, les lignes d'extrémités courbes satisfont aux conditions

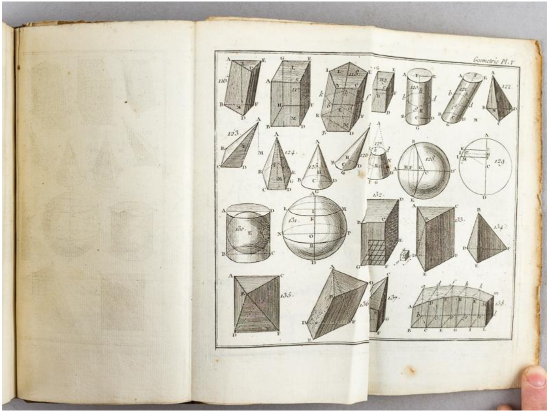
$$\left.\begin{array}{r} -\mathrm{S}N^2\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\delta\left(\frac{dr}{dx''}\right)ds+\mathrm{S}N^2 d\left(\frac{\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}}{dx''}\right)\delta r\, ds \\ +\mathrm{S}\frac{N^2}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(\frac{dr}{dx''}\right)\delta r\, ds \end{array}\right\}=0;$$

$$\left.\begin{array}{r} -\mathrm{S}N^2\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\delta\left(\frac{dr}{ds}\right)dx+\mathrm{S}N^2 d\left(\frac{\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}}{ds}\right)\delta r\, dx \\ +\mathrm{S}\frac{N^2}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)\delta r\, dx \end{array}\right\}=0;$$

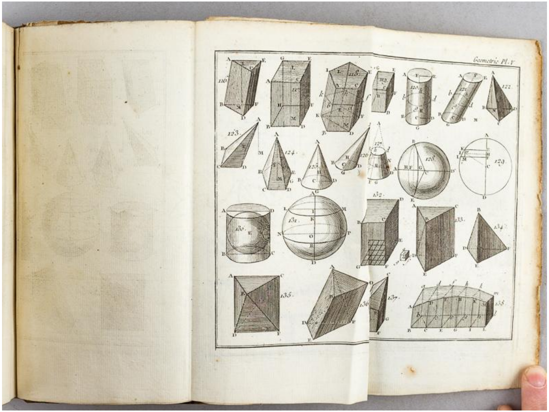
en vertu des équations $dx=0$, $\left(\frac{dr}{dx''}\right)=0$, et $d\left(\frac{\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}}{dx''}\right)=0$; tandis que pour les lignes d'extrémités droites, ce sont les équations


E. Tartaglini - A. Filippini - A. Ferrari
Les audaces de
SOPHIE
GERMAIN
petit à petit

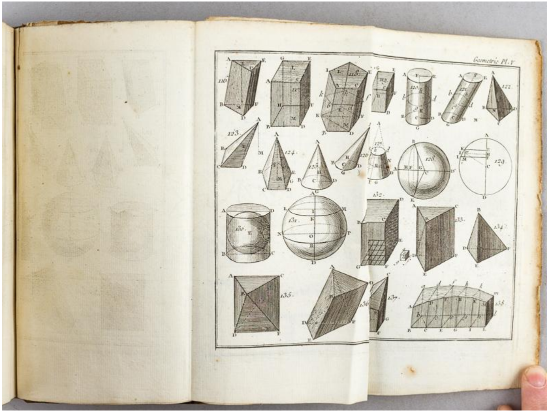
- Née à Paris en 1776 dans une famille aisée et cultivée
- Père commerçant en soie et tissus, député de la Constituante de 1789 à 1791



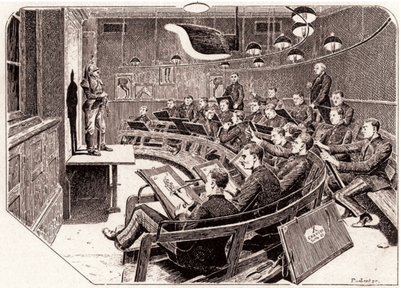
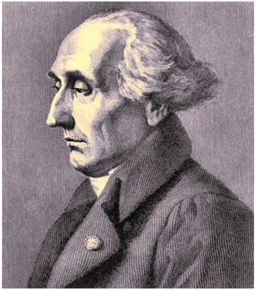
- Une véritable bibliothèque avec des livres de mathématiques



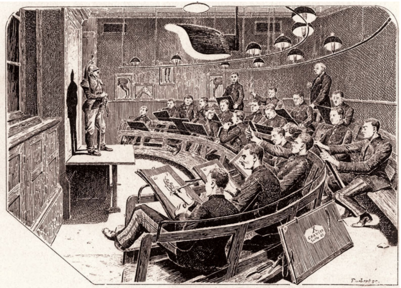
- Une véritable bibliothèque avec des livres de mathématiques
- Son père lui cache les bougies pour qu'elle arrête de travailler les mathématiques...

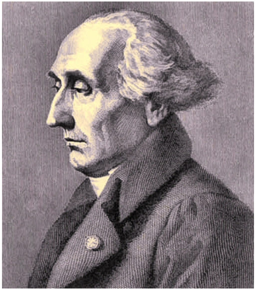


- Une véritable bibliothèque avec des livres de mathématiques
- Son père lui cache les bougies pour qu’elle arrête de travailler les mathématiques... puis finit par céder et la laisse apprendre en toute liberté.

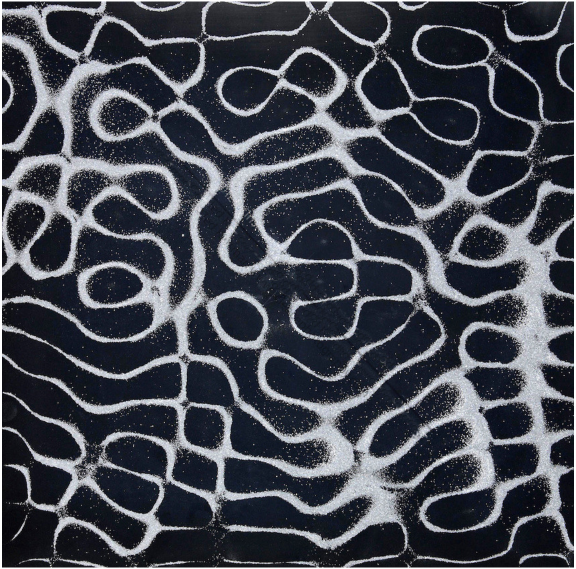
- Sous un nom d’homme (Leblanc), elle récupère des cours de l’École polytechnique.
- Échange avec le mathématicien Joseph Lagrange.

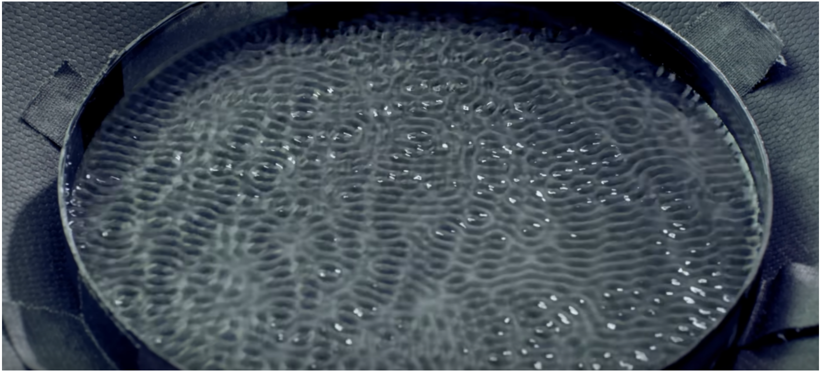


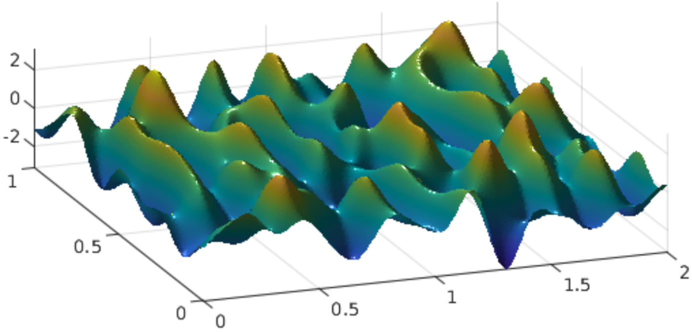


- Sous un nom d'homme (Leblanc), elle récupère des cours de l'École polytechnique.
- Échange avec le mathématicien Joseph Lagrange.
- Subit le sexisme de nombreux mathématiciens

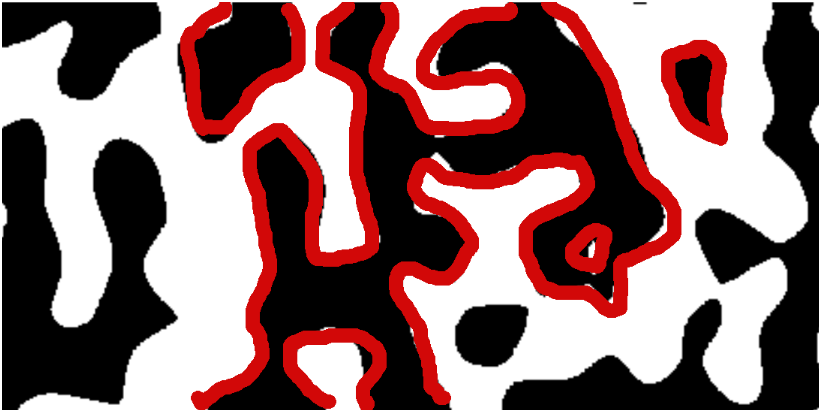
L'académicienne Nalini Anantharaman,
spécialiste mondiale du *chaos quantique*
(une théorie proche des figures de Chladni)



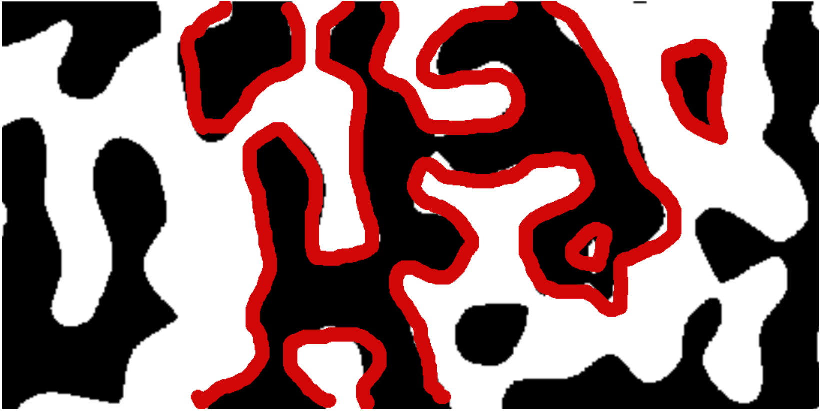




2
0
-2
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2



Figures de Chladni

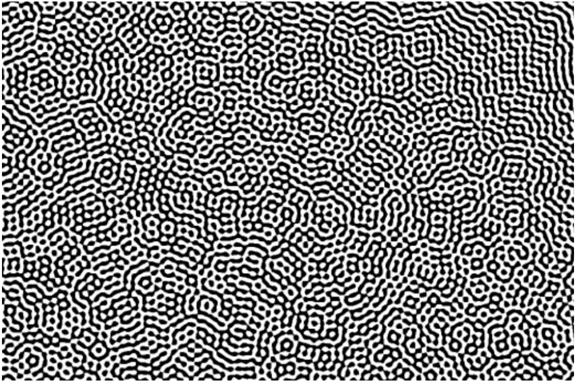


Figures de Chladni

=

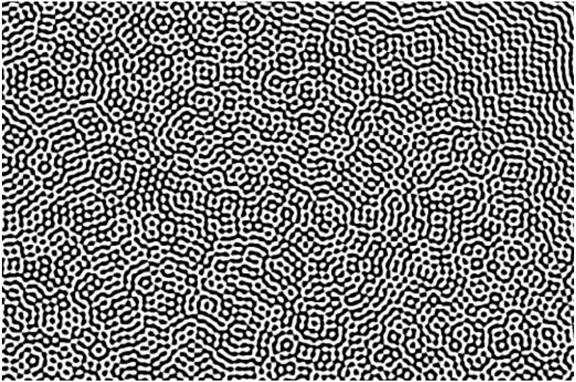
lignes *nodales*

Questions !

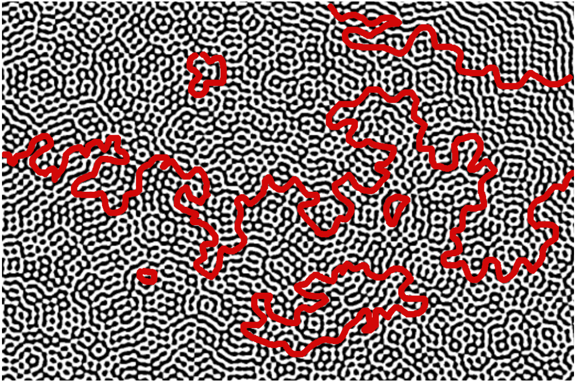


- Quelle est la forme de ces lignes nodales ?

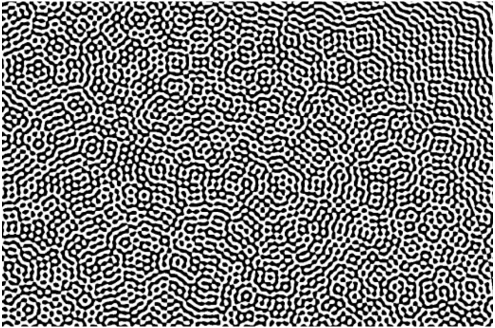
Questions !



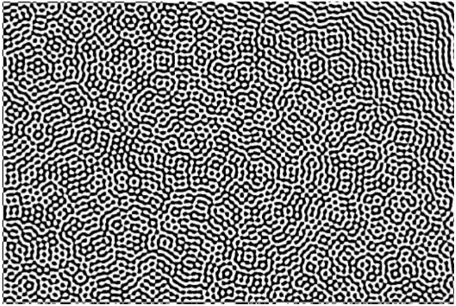
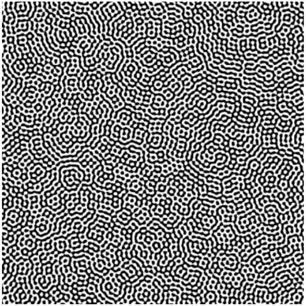
- Quelle est la forme de ces lignes nodales ?
- Y a-t-il des lignes qui traversent des grands rectangles de gauche à droite ?



- Quelle est la forme de ces lignes nodales ?
- Y a-t-il des lignes qui traversent des grands rectangles de gauche à droite ?

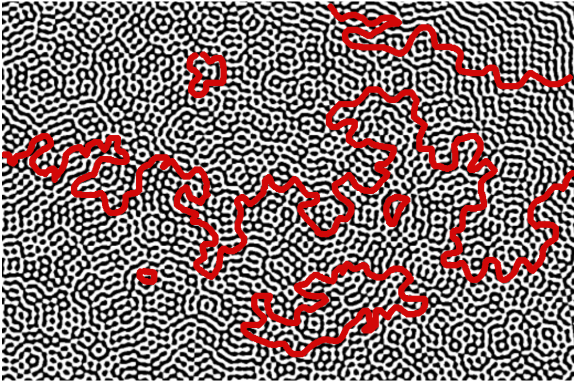


Conjecture de Berry : Ces déformations de plaque à grandes fréquences ressemblent beaucoup à des déformations aléatoires (fabriquées au hasard).

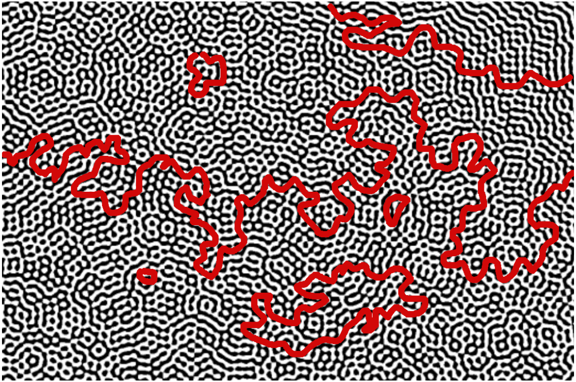
À gauche, une plaque rectangulaire et ses figures de Chladni
À droite, une déformation construite au hasard

Questions, version probabiliste !



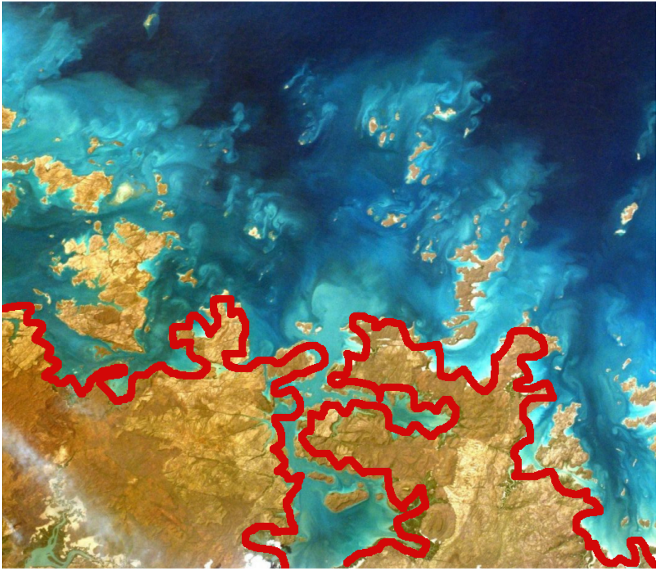
- Quelle *statistiquement* est la forme de ces lignes nodales aléatoires ?

Questions, version probabiliste !

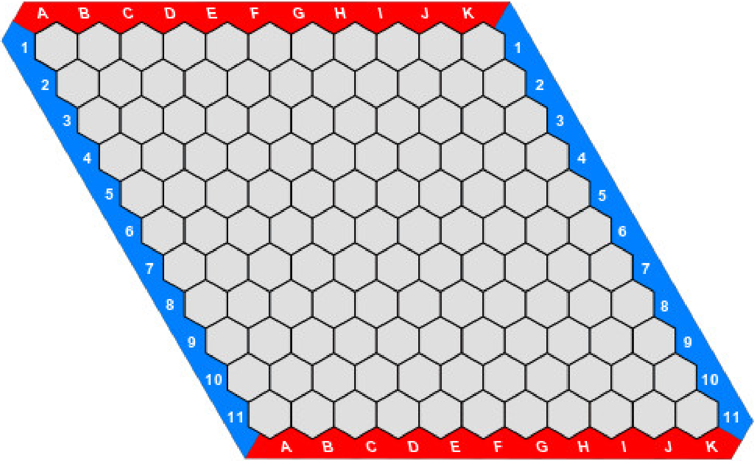


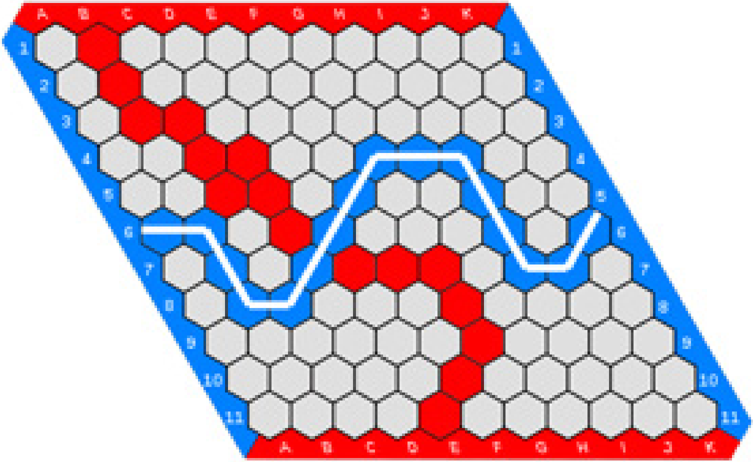
- Quelle *statistiquement* est la forme de ces lignes nodales aléatoires ?
- Quelle est la *probabilité* qu'une ligne nodale traverse un grand rectangle de gauche à droite ?

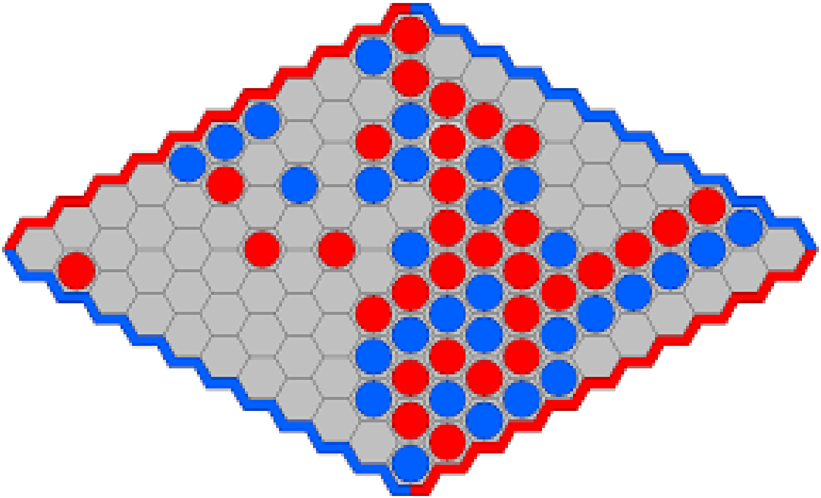
Partie 2
La rouille



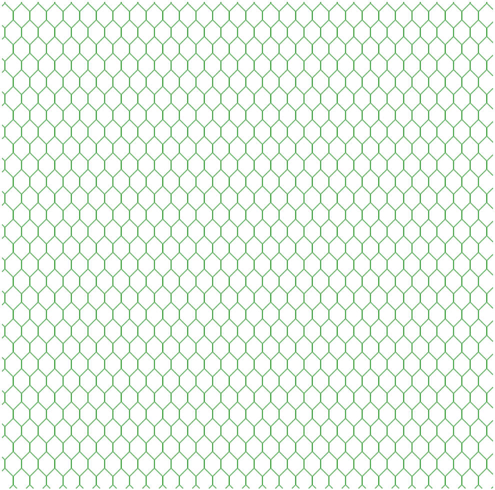

THE ZIG-ZAG GAME
HEX
Rules for Playing


A B C D E F G H I J K
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
A B C D E F G H I J K

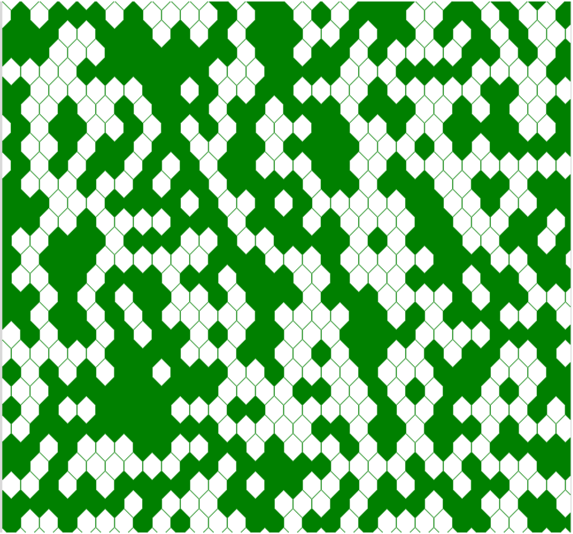

A B C D E F G H I J K
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

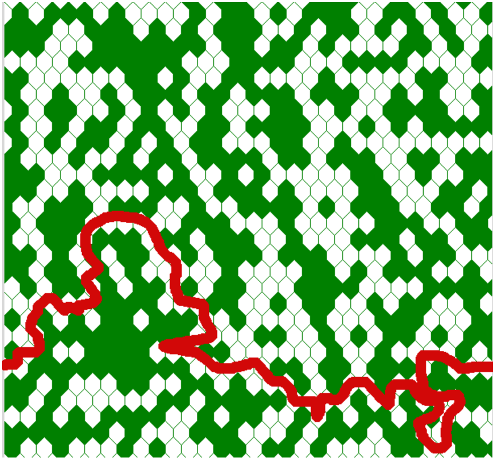


Un pile ou face pour modéliser la rouille

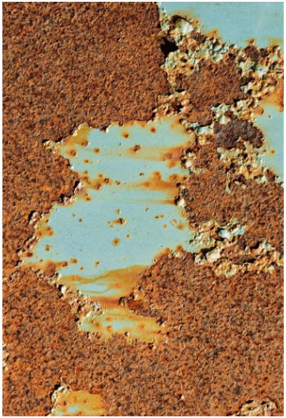
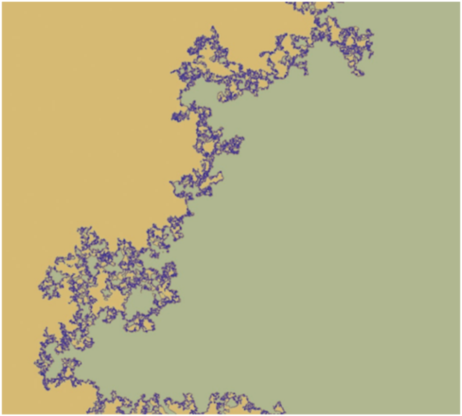


- case verte si pile (pas rouillée)
- case blanche si face (rouillée).



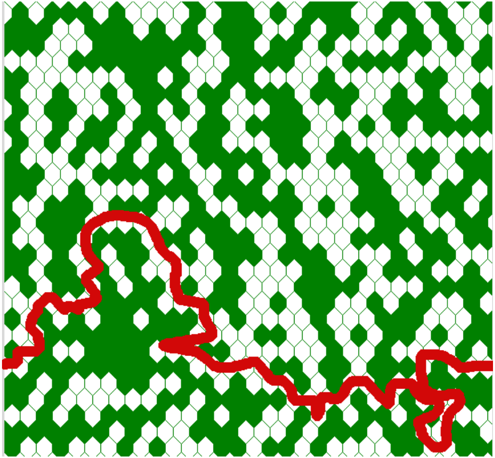


Les traversées de percolation ressemblent à
des bords de zones rouillées

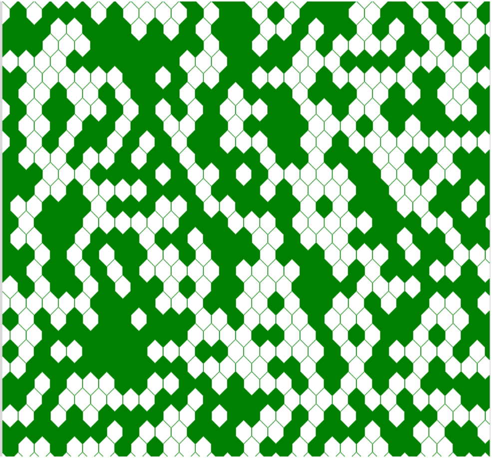
 

Les traversées de percolation ressemblent à
des bords de zones rouillées

Question !

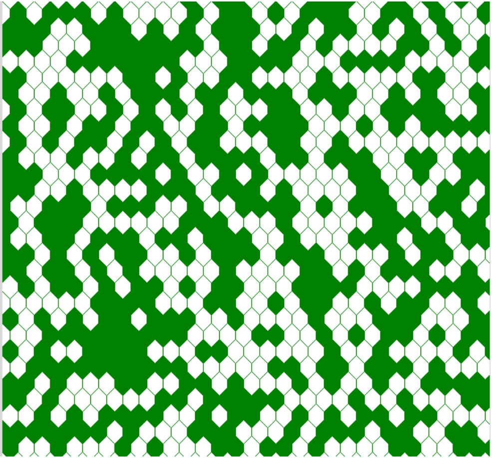


Quelle est la probabilité que la rouille connecte deux bords d’un rectangle ?



Jeu :

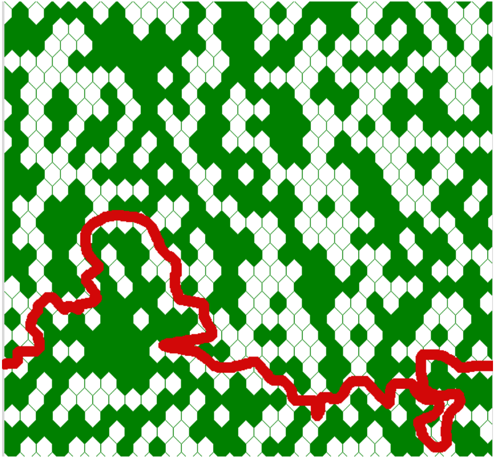
- Blanc gagne s'il traverse horizontalement
- Vert gagne s'il traverse verticalement.



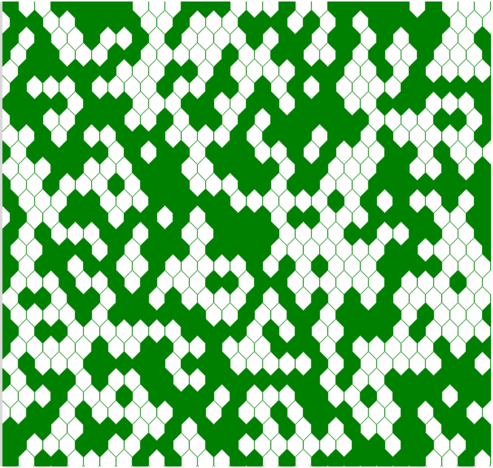
Jeu :

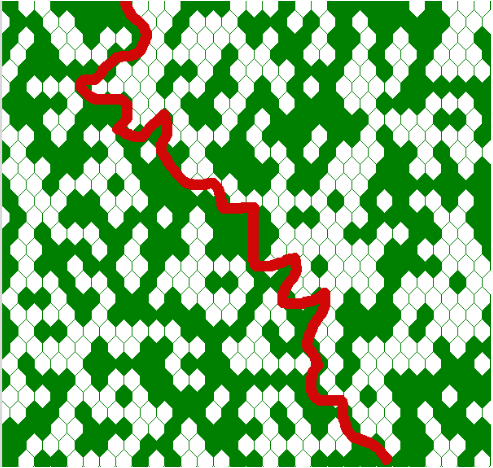
- Blanc gagne s'il traverse horizontalement
- Vert gagne s'il traverse verticalement.

Qui a gagné ?

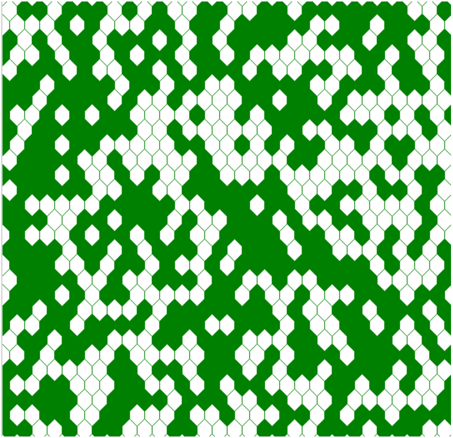


Blanc a gagné !





Vert a gagné !

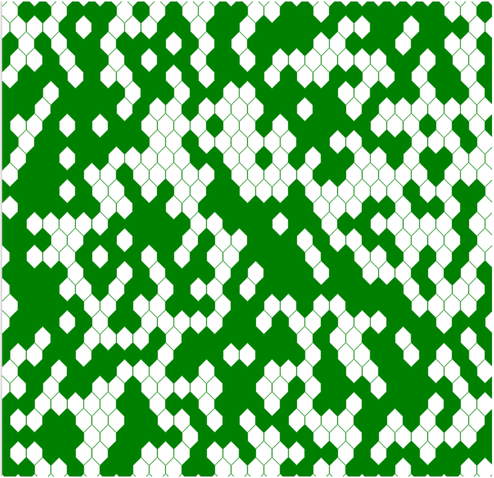


Jeu avec argent :

- si Blanc traverse horizontalement vous gagnez 1 euro
- si Vert gagne traverse verticalement je gagne 2 euros

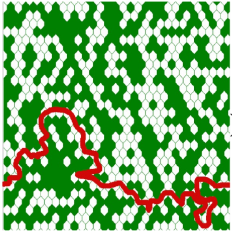
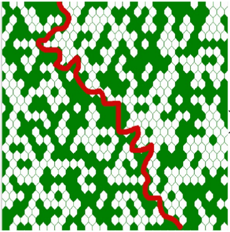
Jouez-vous avec moi ?

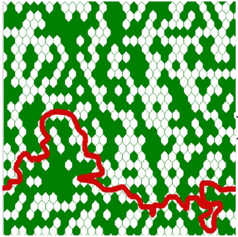
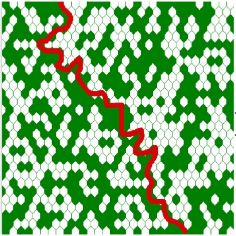
Jouez-vous avec moi ?

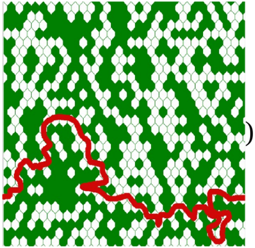
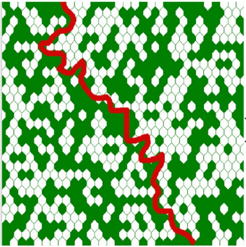


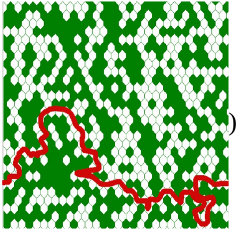
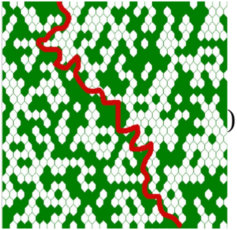
Quelle est la probabilité que

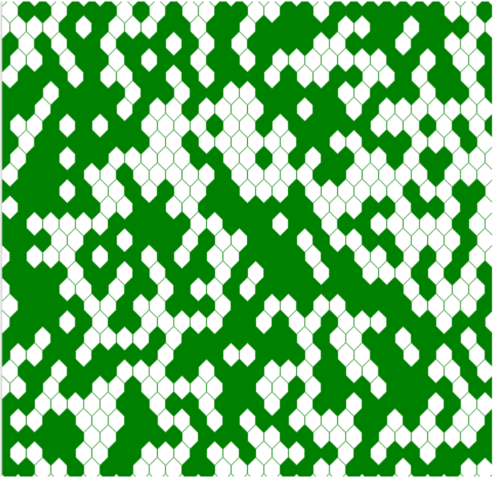
- Vert gagne (traverse verticalement) ?
- Blanc gagne (traverse horizontalement) ?

Probabilité () + Proba () = ?

Probabilité () + Proba () = 1

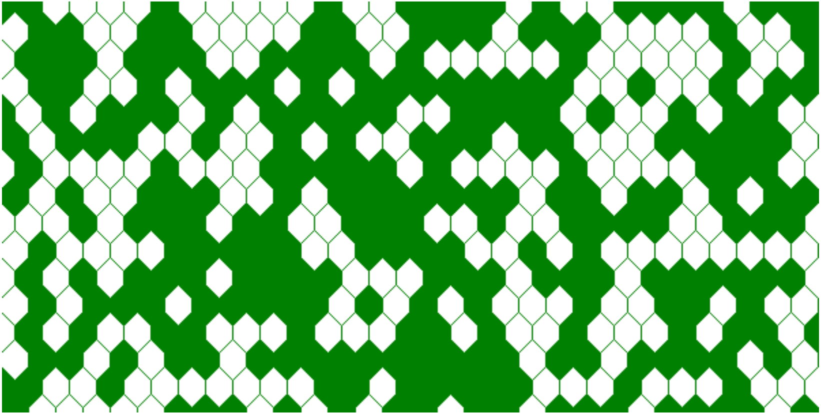
Probabilité () = Proba ()

Probabilité () = Proba () =1/2

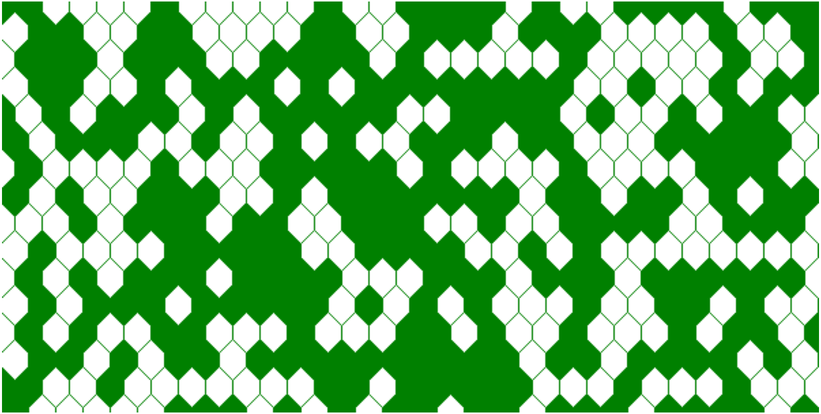


Pour un carré :

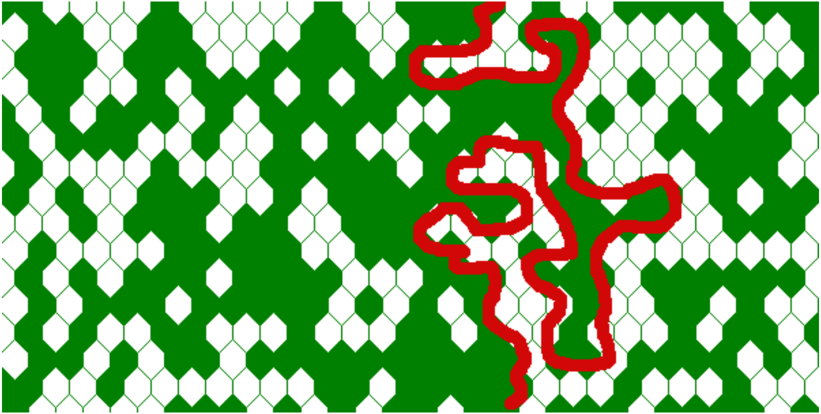
- La probabilité de traverser horizontalement ou verticalement est 1/2.
- Donc le jeu équitable est un contre un



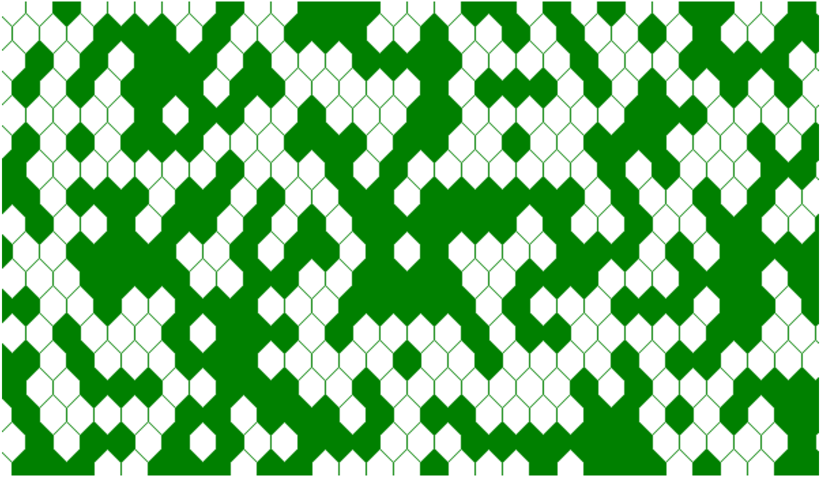
Rectangle 2 :1 (deux fois plus long que large)

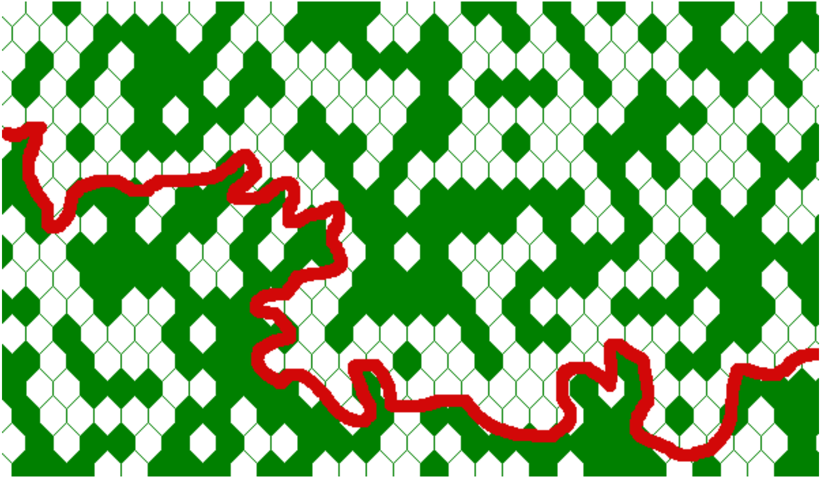


Qui gagne ?

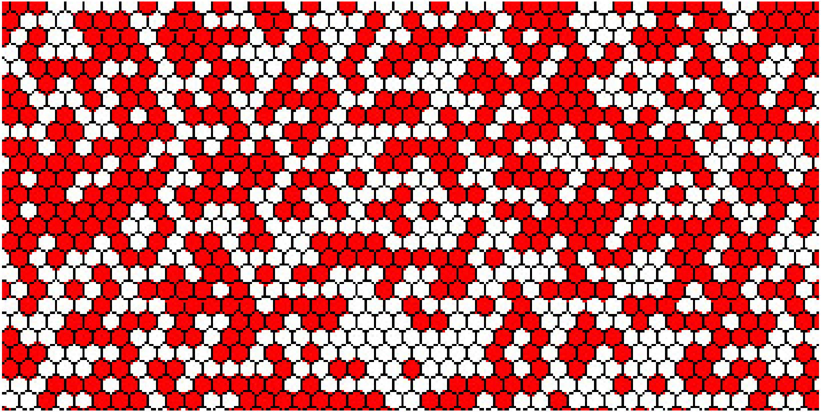


Vert gagne !





Blanc gagne !

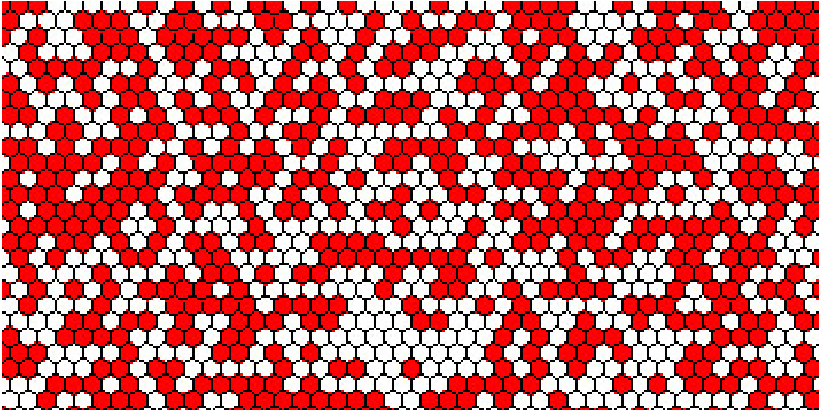


Jeu 2 :1

- si Rouge passe verticalement, je gagne 1 euros
- si Blanc passe horizontalement, vous gagnez 1 euros.

Jouez-vous avec moi ?

Jouez-vous avec moi ?



Jeu 2 :1 bis

- si Rouge passe verticalement, je gagne 1 euros
- si Blanc passe horizontalement, vous gagnez 2 euros.

Jouez-vous avec moi ?

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :
  1. Rouge ne traverse pas verticalement dans le premier carré

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :
  1. Rouge ne traverse pas verticalement dans le premier carré
  2. Rouge ne traverse pas verticalement dans le second carré

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :
  1. Rouge ne traverse pas verticalement dans le premier carré
  2. Rouge ne traverse pas verticalement dans le second carré
- Ces deux événements sont indépendants.

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :
  1. Rouge ne traverse pas verticalement dans le premier carré
  2. Rouge ne traverse pas verticalement dans le second carré
- Ces deux événements sont indépendants.
- Et de probabilité chacun $\frac{1}{2}$
- Donc la probabilité que ça arrive est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

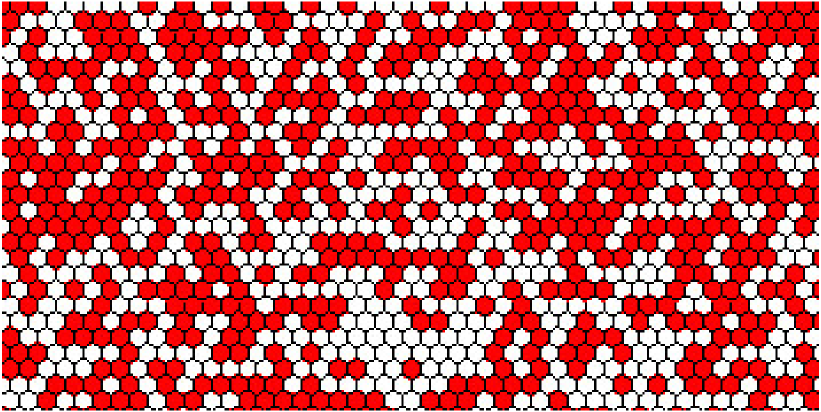
- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :
  1. Rouge ne traverse pas verticalement dans le premier carré
  2. Rouge ne traverse pas verticalement dans le second carré
- Ces deux événements sont indépendants.
- Et de probabilité chacun $\frac{1}{2}$
- Donc la probabilité que ça arrive est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- Donc la probabilité que Blanc gagne est inférieure à $\frac{1}{4}$
- Donc la probabilité que Rouge passe verticalement est supérieure à $\frac{3}{4}$.

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :
  1. Rouge ne traverse pas verticalement dans le premier carré
  2. Rouge ne traverse pas verticalement dans le second carré
- Ces deux événements sont indépendants.
- Et de probabilité chacun $\frac{1}{2}$
- Donc la probabilité que ça arrive est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- Donc la probabilité que Blanc gagne est inférieure à $\frac{1}{4}$
- Donc la probabilité que Rouge passe verticalement est supérieure à $\frac{3}{4}$.
- Au total c'est au moins 3 fois plus facile pour rouge que pour blanc.

Pourquoi cette réticence à un pari deux contre un ?

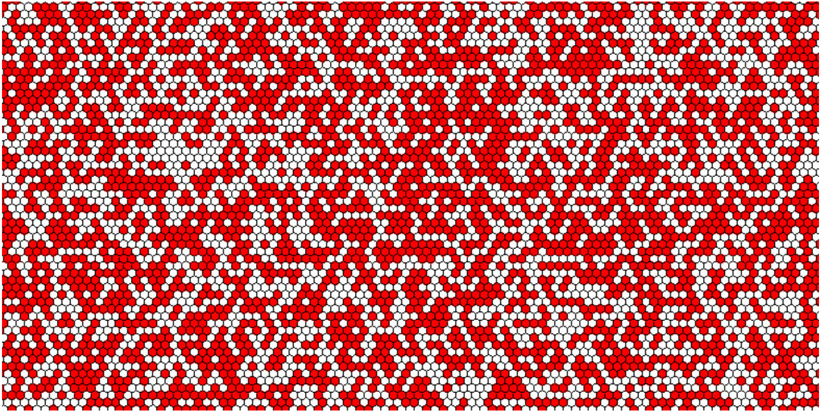
- On coupe le rectangle 2 :1 en deux carrés adjacents
- Si Blanc passe horizontalement alors :
  1. Rouge ne traverse pas verticalement dans le premier carré
  2. Rouge ne traverse pas verticalement dans le second carré
- Ces deux événements sont indépendants.
- Et de probabilité chacun $\frac{1}{2}$
- Donc la probabilité que ça arrive est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- Donc la probabilité que Blanc gagne est inférieure à $\frac{1}{4}$
- Donc la probabilité que Rouge passe verticalement est supérieure à $\frac{3}{4}$.
- Au total c'est au moins 3 fois plus facile pour rouge que pour blanc.
- Donc le pari doit être *au moins* 3 contre 1 !



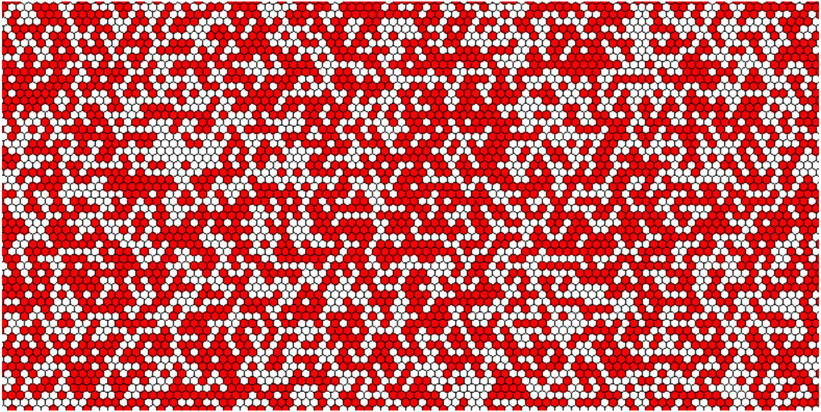
Jeu 2 :1 ter

- si Rouge passe verticalement, je gagne 1 euro.
- si Blanc passe horizontalement, vous gagnez 15 euros.

Jouez-vous avec moi ?

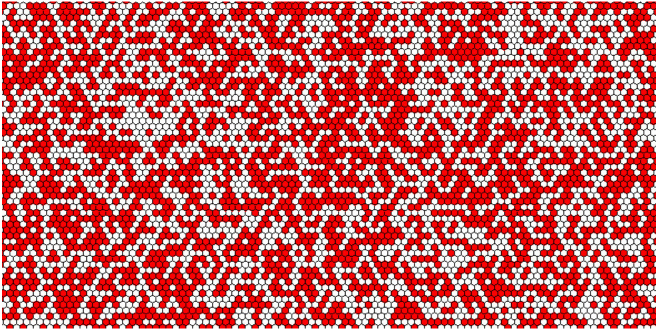


Quel est le jeu équitable ?

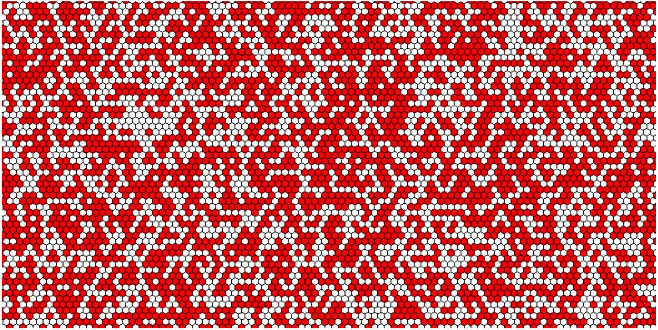


Quel est le jeu équitable ?

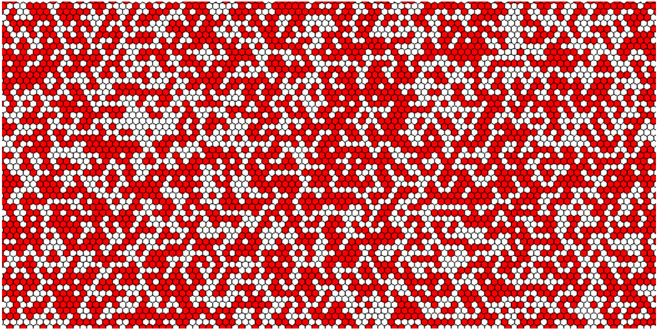
Quelle est la probabilité de traversée horizontale (ou verticale) ?



Théorème (Stanislas Smirnov 2000) Quand la taille du rectangle 2 :1 tend vers l'infini, le jeu équitable tend vers :



Théorème (Stanislas Smirnov 2000) Quand la taille du rectangle 2 :1 tend vers l'infini, le jeu équitable tend vers :
1 euros pour Rouge vertical
contre

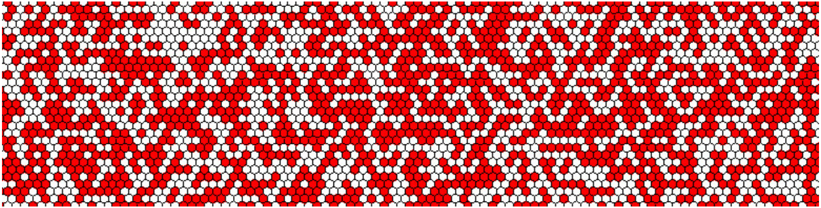


Théorème (Stanislas Smirnov 2000) Quand la taille du rectangle 2 :1 tend vers l'infini, le jeu équitable tend vers :

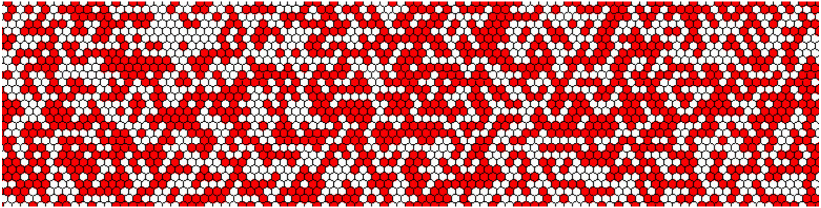
1 euros pour Rouge vertical

contre

4, 74 euros pour Blanc horizontal.



Pour un rectangle 4 :1, c'est
1 euro
contre

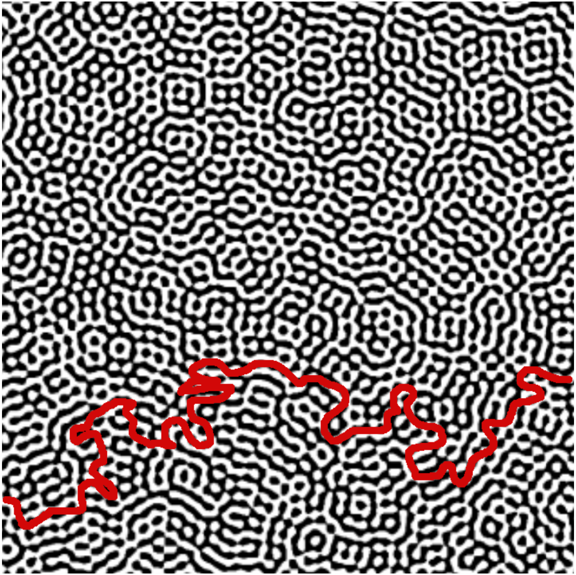


Pour un rectangle 4 :1, c'est
1 euro
contre
45,3 euros.

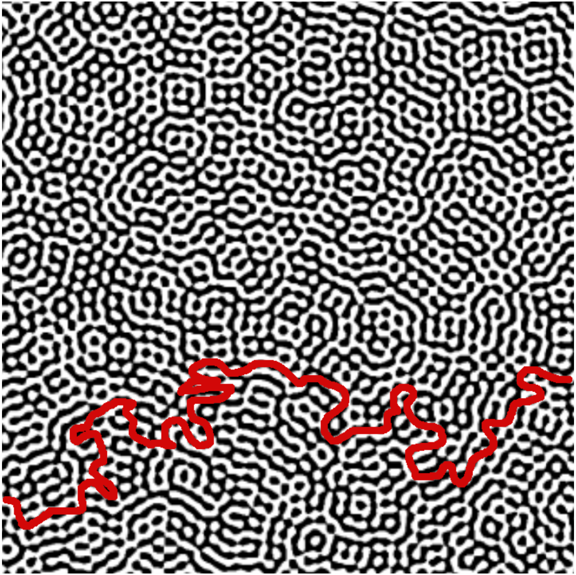
Partie 3
Lignes nodales et percolation

Noir vertical gagne contre blanc horizontal

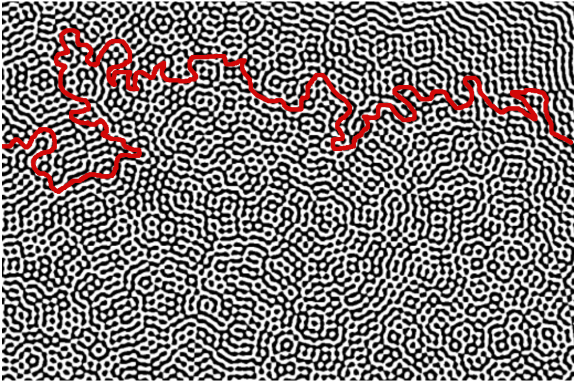
Noir vertical gagne contre blanc horizontal
Quelle est le jeu équitable ?



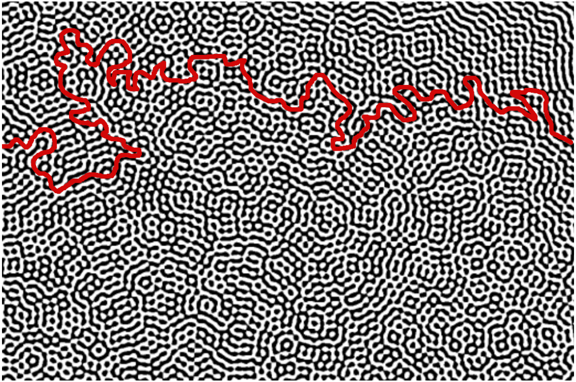
Carré : le jeu équitable est



Carré : le jeu équitable est 1 euro contre 1 euro
Probabilité = 1/2 pour un carré



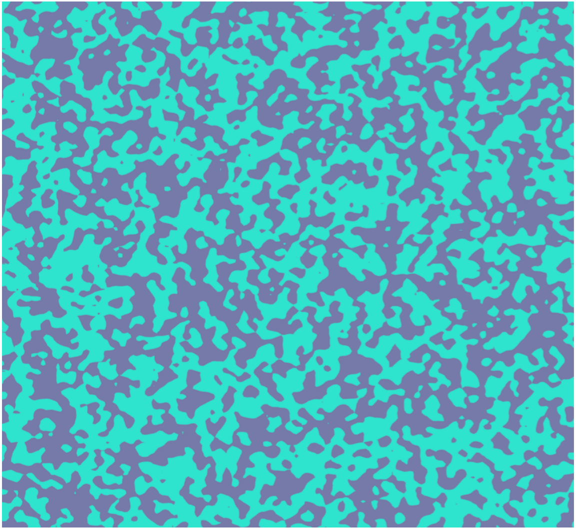
Probabilité pour un rectangle 2 :1 ?



Probabilité pour un rectangle 2 :1 ?

Problème ouvert !

Conjecture : même réponse que pour la percolation hexagonale.



Le champ de *Bargmann-Fock*

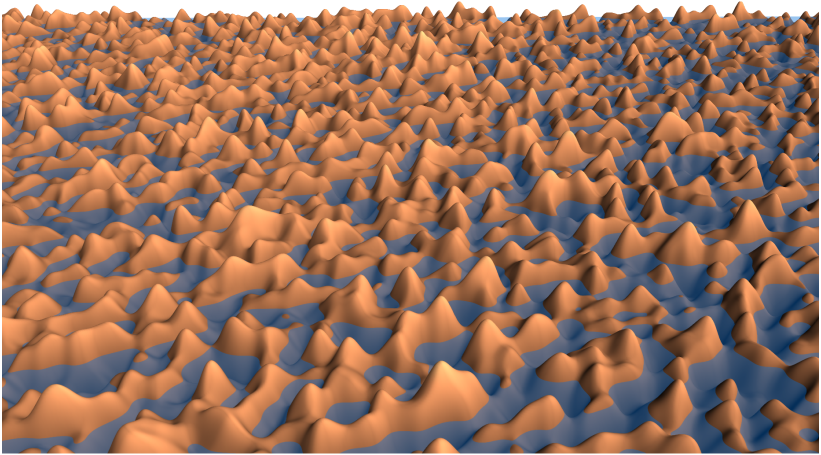
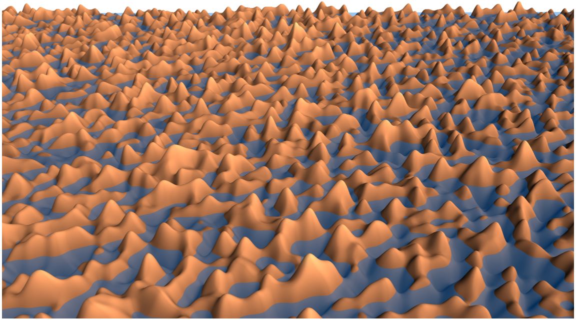
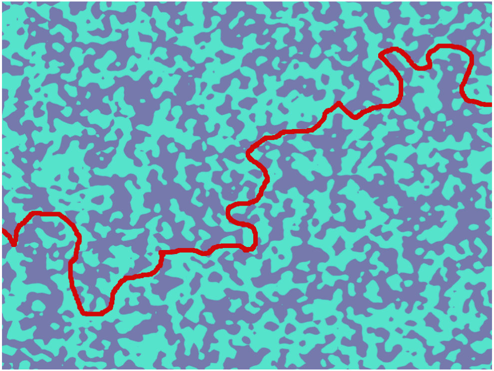


Image Alejandro Rivera

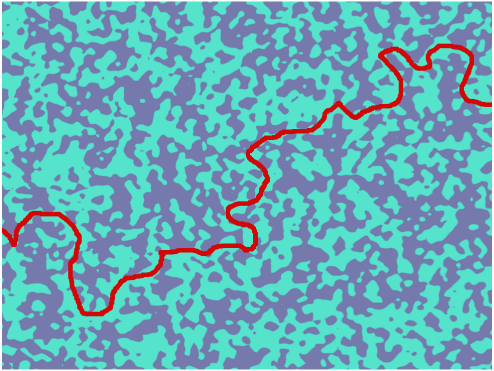


$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} \frac{x^i y^j}{\sqrt{i!j!}},$$

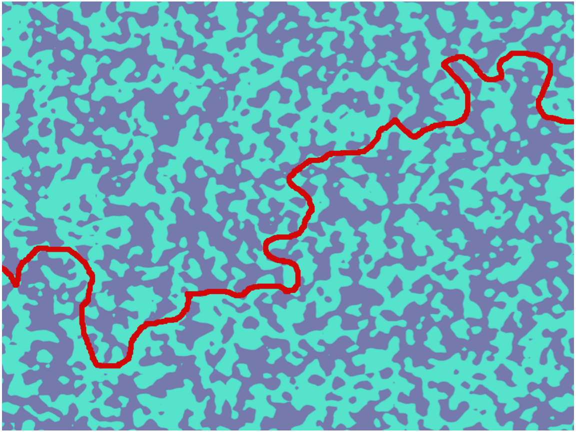
avec les coefficients $a_{i,j}$ indépendants et suivant la loi normale standard $N(0,1)$.



Quelle est la probabilité de traverser horizontalement ?



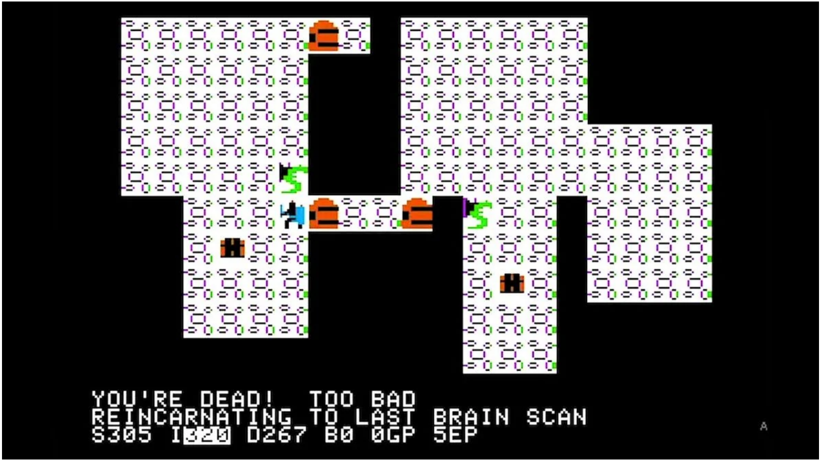
Théorème (Vincent Beffara et D.G. 2016) Il existe $p > 0$ tel pour tout rectangle de forme 2 :1, Bleu Clair traverse horizontalement avec une probabilité au moins p.



Conjecture : La probabilité optimale est la même que pour la percolation hexagonale.

Interlude : les premiers mondes aléatoires

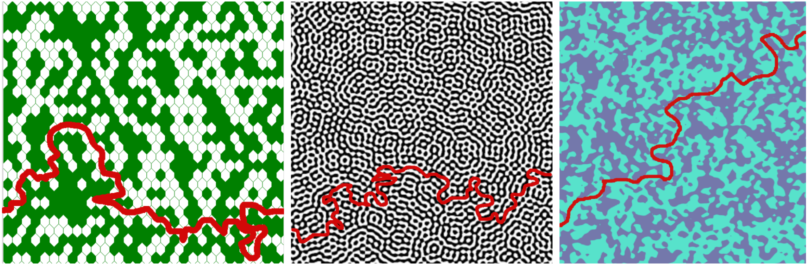
Dragon Maze, 1978

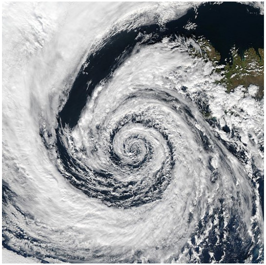
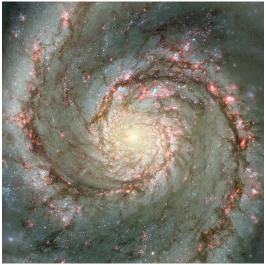


Beneath Apple Manor, 1978

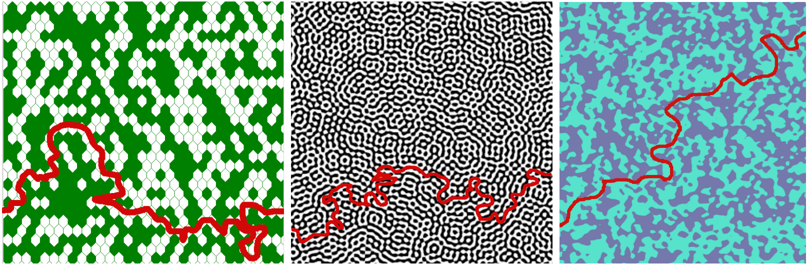
Starfield, 2023

Partie 4
De l’agitation dans la percolation

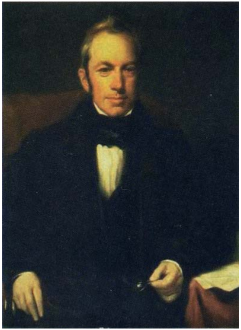


Spirale



?



Robert Brown (1773 - 1858)

Une observation de 1828

Brownien gif

- 1905 Einstein donne une explication mathématique du mouvement brownien des grains :

- 1905 Einstein donne une explication mathématique du mouvement brownien des grains : c'est le résultat de très nombreux chocs aléatoires par les atomes du liquide.
- 1908 : Jean Perrin confirme expérimentalement la théorie d'Einstein

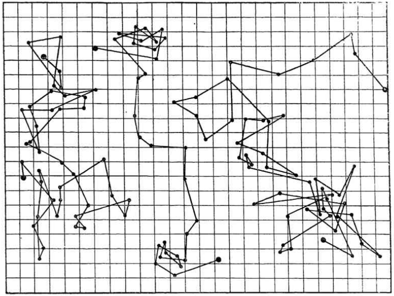


Fig. 2.

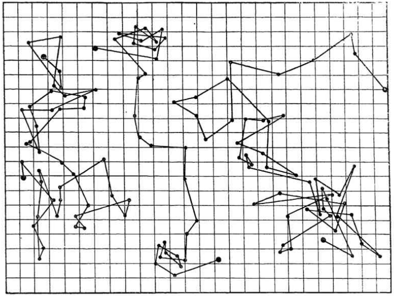
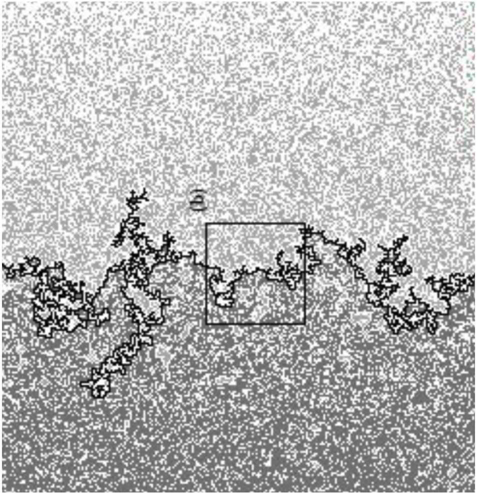
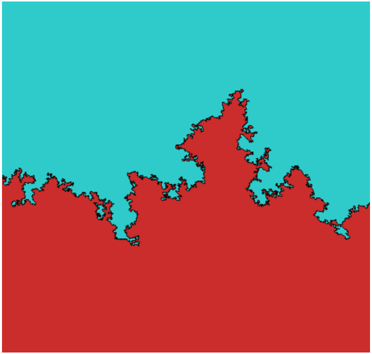


Fig. 2.

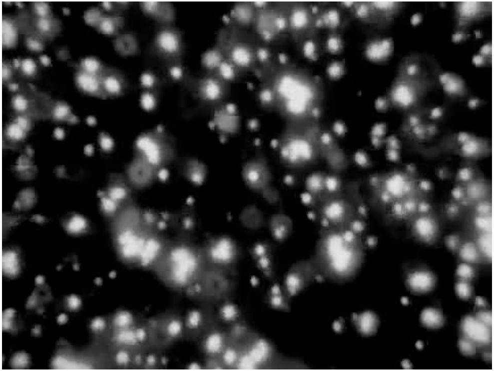
Les mesures du physicien Jean Perrin et une trajectoire mathématique

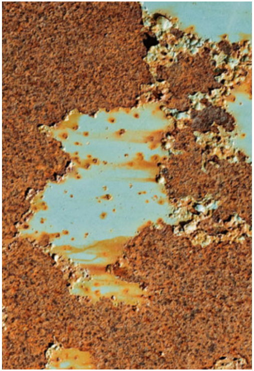


Théorème (Schramm-Smirnov 2001) À très grande échelle les traversées de percolation les plus basses de rectangle deviennent des *transformations* d'un mouvement brownien.



Brownien → Traversées de percolation





Il y a un lien profond mathématique entre la rouille et le mouvement moléculaire !

Comment transformer une courbe en une autre ?

Jeanne d'Arc Girubuntu (Rwanda)

Comment transformer une courbe en une autre ?

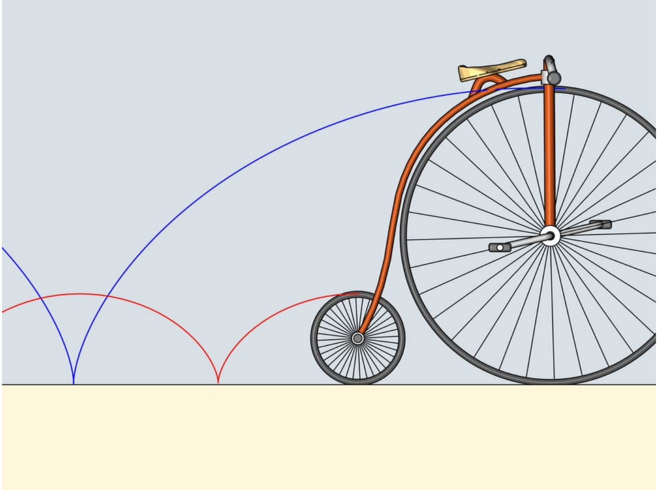
Jeanne d'Arc Girubuntu (Rwanda)

- Un point du pneu extérieur suit un cercle dans le référentiel de la cycliste.

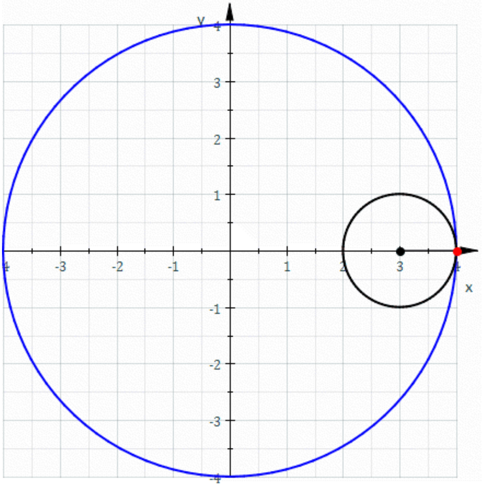
Comment transformer une courbe en une autre ?

Jeanne d'Arc Girubuntu (Rwanda)

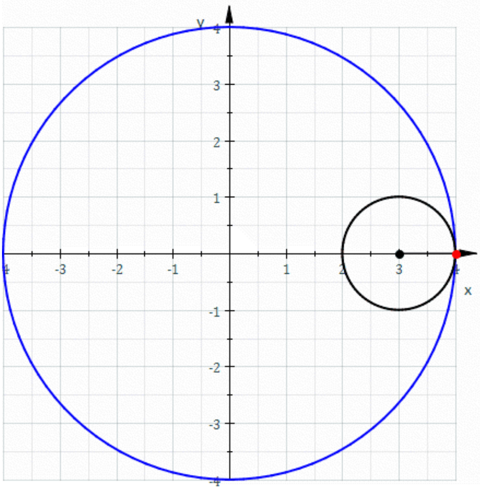
- Un point du pneu extérieur suit un cercle dans le référentiel de la cycliste.
- Dans le référentiel d'un spectateur, quelle trajectoire suit ce point ?



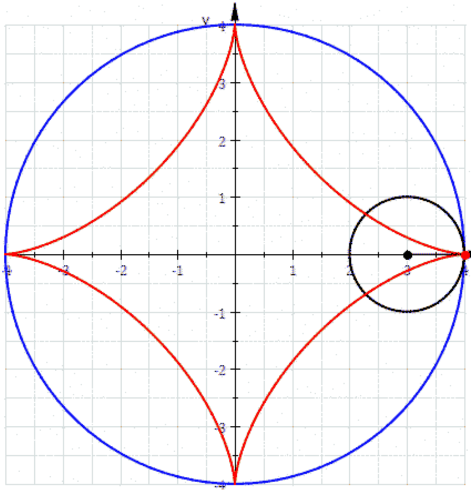
Cercle → Cycloïde



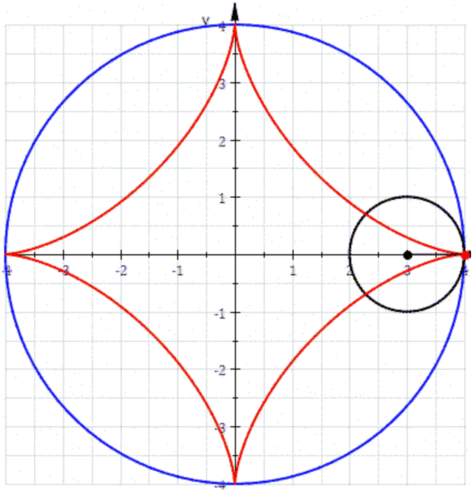
y
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x



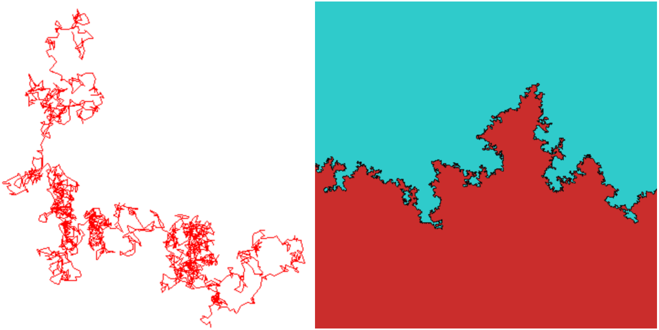
Astro gif



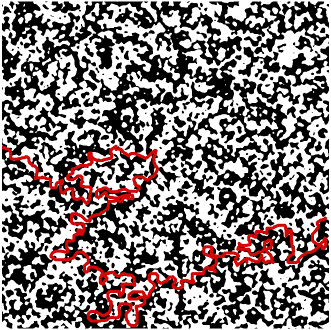
y
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4



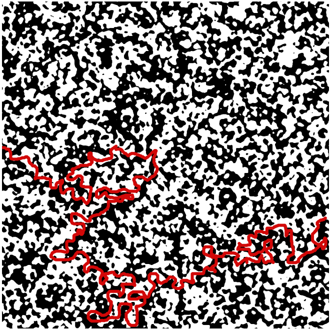
Cercle dans un cercle → Astroïde



Brownien → Bord de percolation

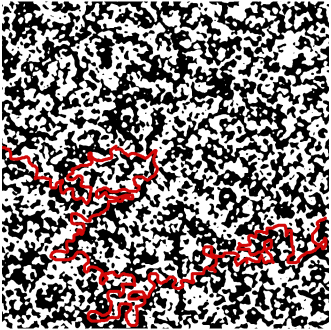
A-t-on la même relation entre les courbes nodales et le mouvement brownien ?

A-t-on la même relation entre les courbes nodales et le mouvement brownien ?

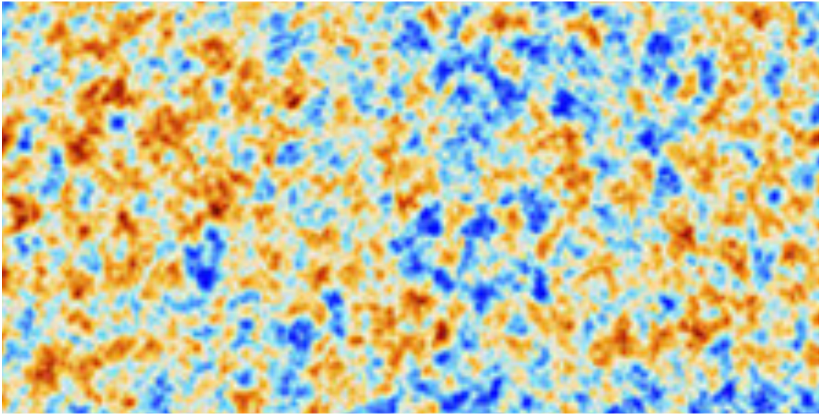
Beaucoup plus difficile :

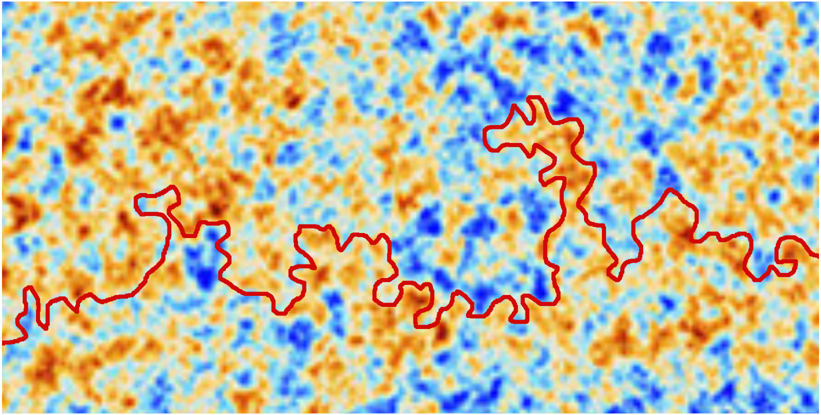
Pour les futur·e·s mathématicien·ne·s

A-t-on la même relation entre les courbes nodales et le mouvement brownien ?

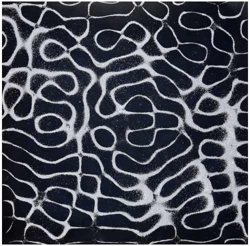
Beaucoup plus difficile :
Pour les futur·e·s mathématicien·ne·s : vous !)

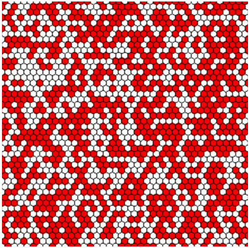


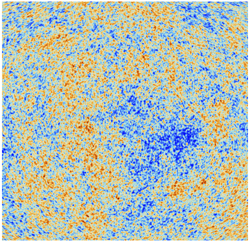


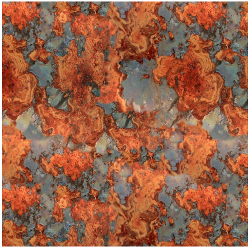
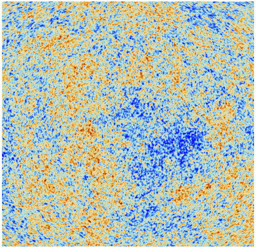
Du brownien dans le fond diffus cosmologique ?

Conclusion

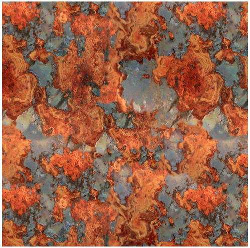
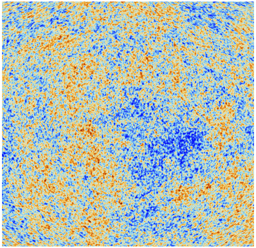




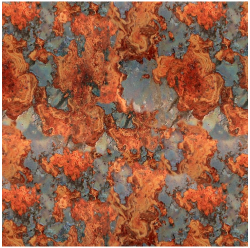


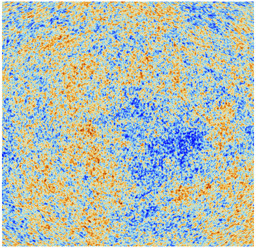
  

- Les mathématiques structurent le monde physique

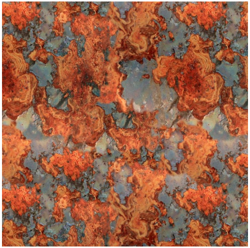
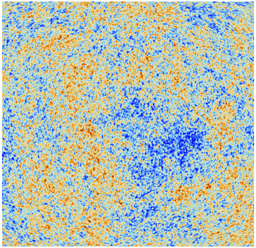
  

- Les mathématiques structurent le monde physique
- Un même objet mathématique peut survenir dans des phénomènes qui n’ont rien à voir a priori





- Les mathématiques structurent le monde physique
- Un même objet mathématique peut survenir dans des phénomènes qui n’ont rien à voir a priori
- Les mathématiques actuelles sont passionnantes proposent toujours plus de mystères à comprendre

- Les mathématiques structurent le monde physique
- Un même objet mathématique peut survenir dans des phénomènes qui n'ont rien à voir a priori
- Les mathématiques actuelles sont passionnantes proposent toujours plus de mystères à comprendre
- Les mathématiques sont faites pour les femmes comme pour les hommes !


THANKS